

Géométrie du cercle et similitudes.

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère un cercle \mathcal{C} et une corde $[AB]$ de ce cercle. On note O le milieu de $[AB]$ et l'on trace deux autres cordes $[CD]$ et $[EF]$ du cercle \mathcal{C} passant par O . Soit G (resp. H) l'intersection de (CE) (resp. (FD)) et (AB) . Le but du problème est de prouver de deux manières différentes que O est le milieu de $[GH]$.

1) Première méthode : Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et s la réflexion par rapport à Δ . On note $s(F) = F'$ et $s(D) = D'$.

- Faire une figure.
- Démontrer l'égalité d'angles orientés de droites : $(OG, OF') = (CG, CF') \pmod{\pi}$. Que peut-on dire des points O, G, C, F' ?
- Démontrer l'égalité : $(F'O, F'G) = (F'O, F'D') \pmod{\pi}$.
- Conclure.

2) Deuxième méthode : La parallèle à (CE) passant par H coupe les droites (CD) et (EF) respectivement en K et L .

- Faire une nouvelle figure.
- Démontrer les égalités :

$$\overline{HLHK} = \overline{HDHF} \quad (1); \quad \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GC}} \quad (2).$$

c) En déduire

$$\frac{OH^2}{OG^2} = \frac{\overline{HDHF}}{\overline{GCGE}} \quad (3)$$

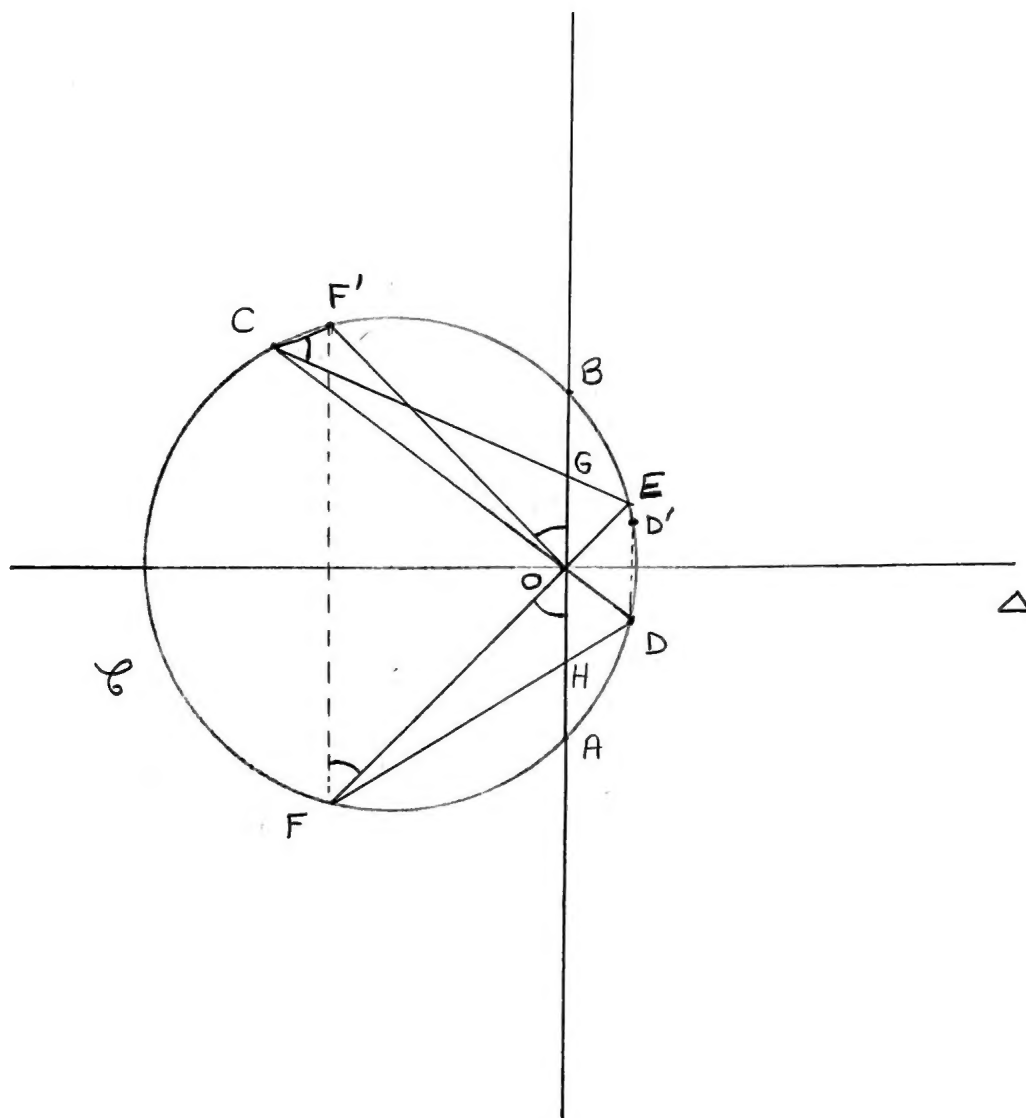
puis l'égalité $OH = OG$.

Solution :

⁰[ucer0002] Dany-Jack Mercier

(adapté de l'énoncé sommaire et mal résolu du Vauthier, ex. oral du capes, n°53 p 120)

1.a)



1.b)

$$(OG, OF') = (OF, OA) = (FE, FF') = (CE, CF') = (CG, CF')$$

$\text{sym.} \qquad \qquad \qquad \text{coc.}$

Les points O, G, C, F' n'étant pas alignés, ils seront cocycliques.

1.c)

$$\begin{aligned} (F'O, F'G) &= (CO, CG) = (CD, CE) = (FD, FE) \\ &\qquad \qquad \text{coc.} \qquad \qquad \qquad \text{coc.} \\ &= (FD, FO) \\ &= (F'O, F'D') \\ &\qquad \qquad \text{sym.} \end{aligned}$$

donc $(F'G) \parallel (F'D')$. Autrement dit les pts F', G, D' sont alignés.

1.d) Vu le c), $G \in (F'D') \cap (AB)$. Comme $\Delta(H) \in \Delta(FD) \cap \Delta(AB)$

et comme $(F'D') \nparallel (AB)$, on déduit : $\boxed{\Delta(H) = G}$

- d'homothétie de centre O et rapport $\frac{\overline{OH}}{\overline{OG}}$ transforme les pts E, G, C en L, H, K . Donc

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GC}} \quad (2)$$

2.c • (1) et (2) entraînent

$$\frac{\overline{OH}^2}{\overline{OG}^2} = \frac{\overline{LH} \times \overline{HK}}{\overline{EG} \cdot \overline{GC}} = \frac{\overline{HD} \cdot \overline{HF}}{\overline{GC} \cdot \overline{GE}} \quad (3)$$

2. (a) La puissance de H au cercle \mathcal{C} est :

$$\overline{HD} \cdot \overline{HF} = \overline{HA} \cdot \overline{HB} = (\overline{HO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{HO} + \overline{OB}) = \overline{OH}^2 - \overline{OA}^2$$

De même,

$$\overline{GC} \cdot \overline{GE} = \overline{GA} \cdot \overline{GB} = \overline{OG}^2 - \overline{OA}^2$$

(3) entraîne alors :

$$\frac{\overline{OH}^2}{\overline{OG}^2} = \frac{\overline{OH}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OG}^2 - \overline{OA}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = 1$$

d'où $\overline{OH} = \overline{OG}$

□

Trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ de même rayon r et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 passent par un même point A . \mathcal{C}_1 recoupe \mathcal{C}_2 en B et \mathcal{C}_3 en C . \mathcal{C}_2 recoupe \mathcal{C}_3 en D .

Hq A est l'orthocentre du triangle BCD .

(réf : extrait d'une activité de 2^{de} relevée sur "Modules aquitains en seconde", cf Repères IREM n°20 de juillet 95)

• Solution : On utilise le résultat suivant :

Dans la figure 1, A, M, C sont alignés

(preuve : (BM) est perp. à (AH) et à (CM) ...)

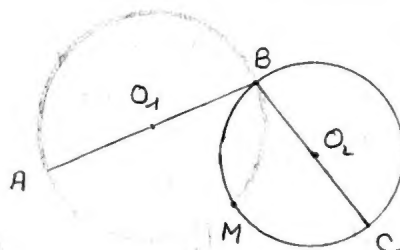


fig 1

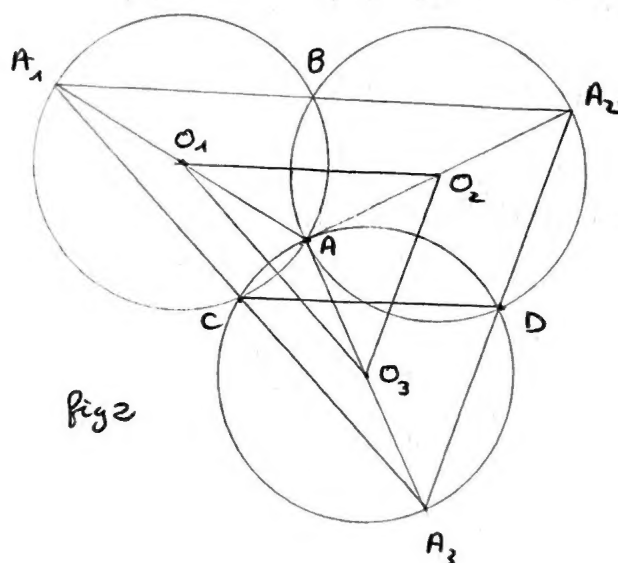


fig 2

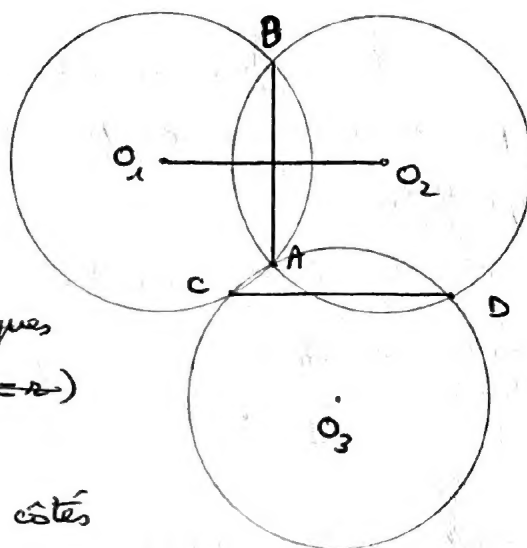
On complète la fig. 2 en traçant les points A_1, A_2, A_3 diamétralement opposés à A sur $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ resp. Le résultat rappelle mq A_1, B, A_2 sont alignés, A_1, C, A_3 aussi et A_2, D, A_3 aussi. De plus $(AB) \perp (A_1A_2)$ et $AA_1 = 2r = AA_2$ montrent que (AB) est la médiatrice de $[A_1A_2]$. En particulier B est le milieu de $[A_1A_2]$. Le même raisonnement prouve que C est le milieu de $[A_1A_3]$ et D celui de $[A_2A_3]$. La réciproque de Thalès montre alors que $(CD) \parallel (A_1A_2)$.

Enfin :
$$\left. \begin{array}{l} (CD) \parallel (A_1A_2) \\ (AB) \perp (A_1A_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (AB) \perp (CD) \Rightarrow A \text{ sur la hauteur issue de } B \text{ du triangle } BCD$$

En recommençant 3 fois, A est l'orthocentre de BCD \square .

• 2^e solution: Vectorielle (inédite)

On utilise les 3 losanges
 O_1AO_2B , O_1AO_3C et O_2AO_3D
 apparaissant sur le dessin.



~~(O_1AO_2B est un losange car il est facile de voir que B et A sont symétriques par rapport à (O_1O_2) , et que $O_1B = O_2B = O_2A = O_1A = r$)~~

O_1AO_2B est un losange car possède 4 côtés égaux. Ses diagonales (O_1O_2) et (AB) sont perpendiculaires.

Tout revient à montrer que $(AB) \perp (CD)$. On a :

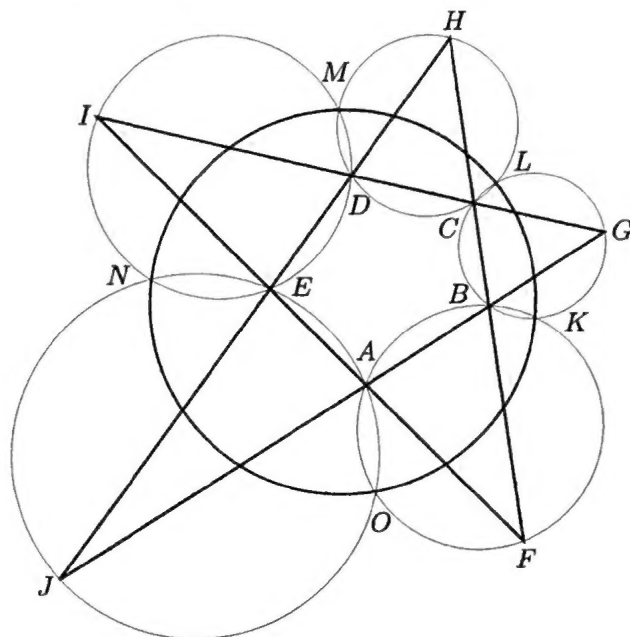
$$\vec{CD} = \vec{CO_3} + \vec{O_3D} = \vec{O_1A} + \vec{AO_2} = \vec{O_1A} + \vec{O_1B} = \vec{O_1O_2}$$

□

3^e solution: Composition d'homothéties signalée dans l'article. Je ne l'avais pas

PENTAGRAMME DE MIQUEL

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe prolongé en un pentagramme $FGHIJ$ ($F = (AE) \cap (BC)$, $G = (AB) \cap (CD)$, \dots). Soit K (resp. L, M, N, O) le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BCG (resp. BCG et CDH , CDH et DEI , DEI et EFJ , EFJ et ABF). Les points K, L, M, N et O sont cocycliques.



Démonstration

Montrons que les points K, L, N et O sont cocycliques, i.e. que $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.

Or :

$$\widehat{OKB} = \pi - \widehat{OAB} = \widehat{OAJ} = \widehat{ONJ}$$

et

$$\widehat{BKL} = \widehat{BGL} = \widehat{JGL}$$

Donc :

$$\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \widehat{OKB} + \widehat{BKL} + \widehat{ONL} = \widehat{ONJ} + \widehat{JGL} + \widehat{ONL} = \widehat{JGL} + \widehat{LNJ}$$

Il faut donc montrer la cocyclicité des points G, L, N et J . Or, si on trace le cercle passant par ces points, on constate qu'il passe également par le point D . On a, d'une part :

$$\widehat{JGL} = \widehat{BGL} = \pi - \widehat{BCL} = \widehat{HCL} = \widehat{HDL} = \pi - \widehat{LDJ}$$

de sorte que les points G, J, L et D sont cocycliques, et d'autre part :

$$\widehat{GJN} = \widehat{AJN} = \pi - \widehat{AEN} = \widehat{NEI} = \widehat{NDI} = \pi - \widehat{GDN}$$

de sorte que les points G, J, N et D sont cocycliques.

Ainsi les points G, L, D, N et J sont cocycliques.

Donc $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.

On prouve de même la cocyclicité des points K, L, M et O .

Finalement, les points K, L, M, N et O sont cocycliques.

C.Q.F.D.